دورة الفصل الأول 2015

★ السؤال الأول :

1) $(-r)m = m(-r) = -rm$

2) $rm = 0 \Rightarrow r = 0$ or $m = 0$

الحل

① $(r + (-r)) = 0_R \Rightarrow (r + (-r))m = 0_R m = 0_m$

$rm + (-r)m = 0_m \Rightarrow (-r)m = -(rm)$

$r(m + (-m)) = rm + r(-m) = r0_m = 0_m$

$\Rightarrow r(-m) = -r(m)$

② إذا كان $r = 0$ فمنه $rm = 0$ وهو المطلوب

إذا لم يكن $r = 0$ وهو من الحلقة R فهنالك احتمالات

ⓐ إذا وجد $r^{-1} \in R$ حيث أن $r^{-1} \neq 0$ وينتج $rr^{-1} = 1$ عندئذ

$rm = 0 \Rightarrow r^{-1}(rm) = r^{-1}(0) = 0$

$(r^{-1}r)m = 0 \Rightarrow 1 \cdot m = 0 \Rightarrow m = 0$

ⓑ أما إذا كان ليس لـ r معكوس ضربي في R فالقضية ليست صحيحة
نستنتج أن القضية في الحالة العامة غير صحيحة وتكون صحيحة فقط في حال وجود معكوس
ضربي لـ r في R

Scanned by CamScanner

* السؤال الثاني

① اثبت أن $L+N$ معدل جزئي في M يحوي كلاً من L, N

② إذا كان $M = L \oplus N$ فأثبت أن $M \setminus L \cong N$

الحل

① $0_m \in L+N \Rightarrow L+N \neq \phi$

$x \in L+N, \; \exists a \in L, \; b \in N, \; x = a+b$

$y \in L+N, \; \exists a' \in L, \; b' \in N, \; y = a'+b'$

P) $x-y = (a+b)-(a'+b')$

$= (a-a') + (b-b') = a'' + b'' \in N' + N$

لأن $a, b, a', b' \in M$ و M زمرة جمعية تبديلية و M زمرة تبادلية بالجمع حيث أن

$a, a' \in L, \; L \subset M \Rightarrow a - a' = a'' \in L$

$b, b' \in N, \; N \subset M \Rightarrow b - b' = b'' \in N$

ومنه

$x - y = a'' + b'' \in L+N$

② $\alpha \in R, \; x \in L+N \overset{?}{\Rightarrow} \alpha x \in L+N$

$\forall x \in L+N, \; \exists a \in L, \; b \in N, \; x = a+b \Rightarrow$

$\alpha x = \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

$\alpha \in R, \; a \in L, \; L \subset M \Rightarrow \alpha a \in L$

$\alpha \in R, \; b \in N, \; N \subset M \Rightarrow \alpha b \in N$

$\Big\} \; \alpha a + \alpha b \in L+N$

$\Rightarrow \alpha x \in L+N$

② $M \setminus L \cong N$ $\qquad M = L \oplus N$

$M = L+N$

$L \cap N = 0$

$\Big\rangle \; L \oplus N = M$

$M \setminus L = L+N \setminus L \cong N \setminus L \cap N = N \setminus 0 \cong N$

* السؤال الثالث:

① أثبت أن Q لا يحوي مقاسات جزئية أصغرية

② أثبت أن Q لا يحوي مقاسات جزئية أعظمية

الحل:

① لتكن A مقاساً جزئياً من Q غير صفري وبالتالي

$$0 \neq a \in A \Rightarrow a \in Q$$

عندئذ $2Za \subsetneq Za \subsetneq A \subsetneq Q_Z$

أي أن A ليس أصغرياً.

② لتكن A مقاساً جزئياً أعظمياً في Q عندئذ $A \neq Q$

$q \in Q_Z$ و $q \notin A$ عندئذ المجموعة $(A + Zq)$ هو مقاس جزئي في Q (مجموع مقاسين جزئيين هو مقاس جزئي)

عناصرها بالشكل

$$\forall y \in A + Zq \quad \exists\, z_1 \in Z ,\ a_1 \in A$$

$$y = a_1 + z_1 q$$

$Q_Z \supseteq Zq + A \supsetneq A$ وبما أن A أعظمي حسب الفرض يكون

$$Zq + A = Q_Z$$

عندئذ ستكون المجموعة $A \cup \{q\}$ مولدة لـ Q_Z حسب نظرية [illegible] التالي

تكون q مستقلة A مولدة لـ Q_Z وبالتالي أن A هي نفسها Q_Z أي أن

$A = Q_Z$ وبالتالي A ليس أعظمي وهذا تناقض وبالتالي Q_Z لا يحوي مقاسات أعظمية.

Scanned by CamScanner

السؤال الرابع

أثبت ان المتتالية $0 \to M \xrightarrow{f} N$ تامة اذا وفقط اذا f متباين (1

(2 اذا كان R حلقة و M معيار بسيطا فأثبت ان N معيار بسيط

الحل:

(1) $Im(0 \to M) = \{0\}$

← اذا كانت تامة ← $\ker f = \{0\}$ ← f متباين

f متباين ← $Im(0 \to M) = 0 , \ker f = 0$

أي ان ← $Im(0 \to M) = \ker f$

المتتالية تامة

(2) اذا كان N معيار بسيطا محتوى في مجموع معيارات بسيطة ونهائية

أي جد متشابهات هذا المجموع A عندئذ

$A / \ker \alpha \cong B = Im\,\alpha$ حيث $(\alpha : A \to B , B \to N)$

ملاحظة A بسيطا فإذا اما $\ker \alpha = \{0\}$ عندئذ

$A \cong A/0 \cong B$ وهذا حقيقة

B بسيط أو أن $\ker \alpha = A$ عندئذ $Im A \neq A \cong B$

وهكذا ستكون الصورة الهامة لـ f هي مجموع معيارات بسيطة والمعدول الصفري الذي يعني اهماله ما ان f عامل من $Im f \in N$

أي ان N مجموع معيارات بسيطة فهو معيار بسيطا.